



TITLE:

# 局所体上のWiener測度について(保型的L関数の構成とその応用)

AUTHOR(S):

佐藤, 孝和

---

CITATION:

佐藤, 孝和. 局所体上のWiener測度について(保型的L関数の構成とその応用). 数理解析研究所講究録 1992, 792: 39-63

ISSUE DATE:

1992-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82705>

RIGHT:

## 局所体上の Wiener 測度について

埼玉大学・理学部・数学科 佐藤 孝和 (Takakazu Satoh)

### 1. Introduction

ゼータ関数と呼ばれる一連の整数論と深く関連している関数の解析的性質を調べるのに積分表示は基本的な手法である。例えば Riemann ゼータの Euler  $p$ -factor の積分表示

$$(1-p^{-s})^{-1} = \int_{\mathbf{Z}_p} |x|^{s-1} \frac{p}{p-1} dx,$$

ここで  $dx$  は  $\mathbf{Q}_p$  の Haar 測度であり、 $p/(p-1)$  は単数群の測度を 1 にするための正規化定数である。このようなことを  $\mathbf{Z}$  上有限生成な環に対して行うためにはどうすればよいであろうか。例えば  $T$  を不定元とすると  $\mathbf{Q}_p((T))$  は無限次元  $\mathbf{Q}_p$ -vector space であり、局所コンパクトにはならず、Haar 測度も存在しない。従って、積分表示以前の問題としてそのような空間での可算加法的測度を構成する必要がある。

実数体上の場合には Wiener[4] が  $[0,1]$  上の連続関数  $f$  で  $f(0)=0$  を満たすもの全体の空間に可算加法的測度が定義できることを示した。これは Gross[2] により抽象 Wiener 測度として一般化された。本稿では局所体上の正規直交 Schauder 基底を持つノルム空間（可分な実 Hilbert 空間に相当する）上に Wiener 測度の non-Archimedean 版とも言うべき測度を構成する。(Theorem 3.13)

ここで抽象 Wiener 測度の構成を Kuo[3, Chap. I] に従って要約してみよう。 $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  を可分な実 Hilbert 空間、 $\text{FOP}(H)$  を  $H$  の直交射影で像が有限次元である物の全体の集合とする。適当な  $P \in \text{FOP}(H)$  と  $P(H)$  の Borel 集合  $F$  により

$$\{x \in H : P(x) \in F\}$$

と表される型の集合を  $H$  の cylinder set といい、その全体を  $\text{Cyl}(H)$  と記す。 $H$  には（分散 1 の）Gauss 測度

$$\mu(\{x \in H: P(x) \in F\}) = (2\pi)^{-\dim P(H)/2} \int_F \exp\left(-\frac{\langle x, x \rangle}{2}\right) dx,$$

ここで  $dx$  は  $P(H)$  の Lebesgue 測度、が定義される。これは有限加法的測度であるが可算加法的ではない。他方、 $H$  のノルム  $\|\cdot\|$  は任意の  $\varepsilon > 0$  に対してある  $P \in \text{FOP}(H)$  が存在して  $P(H) \perp Q(H)$  となる任意の  $Q \in \text{FOP}(H)$  に対して

$$\mu(\{x \in H: \|Q(x)\| > \varepsilon\}) < \varepsilon \quad (1.1)$$

が成立するとき可測であると言われる。可測ノルムが  $H$  に定義する位相は  $H$  の内積による位相よりも弱い。そこで  $H$  の  $\|\cdot\|$  による完備化を  $B$  とする。 $B$  は Banach 空間ではあるが一般には Hilbert 空間にならない。適当な有限個の  $B^*$  の元  $y_1, \dots, y_n$  と  $\mathbb{R}^n$  の Borel 集合  $F$  により

$$\{x \in B: (y_1(x), \dots, y_n(x)) \in F\}$$

と表される集合を  $B$  の cylinder set といい、その全体を  $\text{Cyl}^*(B)$  と記す。 $T \in \text{Cyl}^*(B)$  なら  $T \cap H \in \text{Cyl}(H)$  となる。そこで

$$\tilde{\mu}(T) = \mu(T \cap H)$$

とおくと  $\tilde{\mu}$  は  $B$  の Borel 集合体上の可算加法的測度になる。([3, Chap. I, Theorem 4.1, 4.2])

局所体  $K$  上の normed vector space  $H$  に対してこれと同様なことがそのまま成立すればよいのであるが、 $H$  上にはノルムを与えるような内積（双線型写像）が一般には存在しない。 $H$  の2つの部分空間が直交するという概念はあるが、閉部分空間の norm direct supplement（直交補空間に相当する概念）は存在するとは限らないし、したとしても一意的ではない。にもかかわらず、 $H$  には cylinder set が定義され、Gauss 測度（の non-Archimedean version）が定義されることを Lemma 3.4 で示す。§ 2 はこのための準備であり、正規直交 Schauder 基底 (cf. Definition 2.9) を持つ normed  $K$ -vector

space について norm direct supplement やある種の条件を満たす直交射影が存在するための十分条件を与える (Lemma 2.6, 2.9 など)。これらの結果が出来てしまえば後は実 Wiener 測度とほとんど同様な方法で non-Archimedean Wiener 測度が構成できる。

## 2. Non-Archimedean analysis からの準備

本節では後で必要となる non-Archimedean analysis の定義を Bosch, Güntzer and Remmert [1, Chap. II] に基づいてまとめておく。また、直交射影の概念を導入し、Wiener 測度の構成に必要ないくつかの補題を証明する。

$K$  は non-Archimedean な乗法付値  $|\cdot|$  を持つ体とする。 $H$  は、やはり  $|\cdot|$  と書かれるノルムを持つ normed  $K$ -vector space、すなわち、 $K$ -vector space で

$$|a||x| = |ax| \quad (a \in K, x \in H)$$

$$|x+y| \leq \max(|x|, |y|) \quad (x, y \in H)$$

が成り立っているとする。 $1_H$  で  $H$  の恒等作用素を表す。 $A \subset H$  および  $x \in H$  に対し

$$|x, A| = \inf_{a \in A} |a-x|$$

とおく。整数  $n \geq 1$  に対して  $K^n$  は

$$|(c_1, \dots, c_n)| = \max_{1 \leq i \leq n} |c_i|$$

で定義されるノルムを持つ normed  $K$ -vector space を表すものとする。

Definition 2.1.  $V_1, V_2, \dots, V_n$  を normed  $K$ -vector space  $H$  の部分空間とする。任意の  $v_k \in V_k$  に対して

$$\left| \sum_{k=1}^n v_k \right| = \max_{1 \leq k \leq n} |v_k|$$

が成立するとき  $V_1, V_2, \dots, V_n$  は互いに直交するという。この時、和空間  $V_1 + V_2 + \dots + V_n$  は norm direct sum であるといい、 $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$  と書き表す。特に、2つの normed  $K$ -vector space  $V$  と  $W$  が直交することを  $V \perp W$  と表す。

容易に分かるように norm direct sum なら線形空間として直和である。

Definition 2.2.  $H$  の部分空間  $V$  は  $H = V \oplus W$  となる部分空間  $W$  が存在するとき norm direct supplement を持つという。

これは実ヒルベルト空間の場合には直交補空間に相当する概念である。しかし、実ヒルベルト空間では閉部分空間の直交補空間は一意的であるが、非アルキメデスの付値体では norm direct supplement は存在しないかもしれないし、したとしても一意的とは限らない。例えば、 $|a| < 1$  となる任意の  $a \in K$  に対して

$$K^2 = K(1, 0) \oplus K(a, 1)$$

となる。

Definition 2.3.  $H$  の部分空間  $V$  は任意の  $h \in H$  に対して

$$|h - v| = |h, V|$$

となる  $v = v(h) \in V$  が存在するとき strictly closed であるという。

部分空間  $V$  が strictly closed なら closed である。逆に閉部分空間  $V$  は  $|V - \{0\}|$  が  $(\{x \in \mathbf{R}: x > 0\})$  の中で) 離散的なら strictly closed となる。([1, Lemma 1.1.5/3, Proposition 1.1.5/4])

Definition 2.4. normed  $K$ -vector space  $V$  は開球  $B(v_n, r_n) = \{x \in V: |x - v_n| \leq r_n\}$ 、ここで  $v_n \in V, r_n > 0, n = 1, 2, \dots$ 、の降鎖が常に空でない交わりを持つとき spherically complete であるという。

Spherically complete な空間は完備である。逆に、 $|V-\{0\}|$  が離散的である完備な空間は spherically complete である。 $K$  が spherically complete なら有限次元 normed  $K$ -vector space はすべて spherically complete になる。([1, Lemma 2.4.4/4])

Lemma 2.5.  $V$  を  $H$  の strictly closed な部分空間、 $U$  を  $H$  の spherically complete な部分空間とする。 $U$  と  $V$  が直交しているなら  $U \oplus V$  は  $H$  の strictly closed な部分空間である。

*Proof.*  $v \in H-(U \oplus V)$  とする。ベクトル列  $a_n \in U$ 、 $b_n \in V$  で  $d_n = |v-(a_n+b_n)|$  が単調減少かつ  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = |v, U \oplus V|$  となるものが存在する。

$$\begin{aligned} |(a_{n+1}+b_{n+1})-(a_n+b_n)| &= |(v-(a_n+b_n))-(v-(a_{n+1}+b_{n+1}))| \\ &\leq \max(d_n, d_{n+1}) = d_n \end{aligned}$$

となる。他方  $U \perp V$  だから

$$\begin{aligned} |(a_{n+1}+b_{n+1})-(a_n+b_n)| &= \max(|a_{n+1}-a_n|, |b_{n+1}-b_n|) \\ &\geq |a_{n+1}-a_n| \end{aligned}$$

すなわち  $|a_{n+1}-a_n| \leq d_n$ 。ゆえに、 $B_n = \{x \in U: |x-a_n| \leq d_n\}$  とおくと  $B_n$  は開球の減少列になる。 $U$  は spherically complete だから  $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$  の元  $a$  が存在する。 $V$  は strictly closed だから  $|v-a, V| = |v-a-b|$  となる  $b \in V$  が存在する。すると、任意の  $n \geq 1$  に対して

$$\begin{aligned} |v-(a+b)| &\leq |v-a-b_n| = |v-a_n-b_n+a_n-a| \\ &\leq \max(|v-a_n-b_n|, |a_n-a|) \end{aligned}$$

$$\leq \max(d_n, d_n) \rightarrow |v, U \oplus V|$$

となるので  $|v-(a+b)| = |v, U \oplus V|$  である。□

Lemma 2.6.  $K$  が spherically complete で  $V$  は  $\text{codim } V$  が有限である  $H$  の strictly closed な部分空間とする。このとき  $V$  は norm direct supplement を持つ。

*Proof.*  $n = \text{codim } V$  に関する帰納法を用いる。 $n=1$  の時。 $a \in H-V$  を一つ選ぶ。 $V$  は strictly closed だから  $|x-a| = |a, V|$  となる  $x \in V$  が存在する。 $W = K(x-a)$  が  $V$  の norm direct supplement となることを示せば十分である。まず、 $n = \text{codim } V = 1$  だから  $H = V + W$ 。 $V \perp W$  であることは [1, Observation 2.4.2/2] から従うが、便宜上その証明を再掲する。 $c \in K$ ,  $v \in V$  に対して

$$|c(x-a)+v| = \max(|c(x-a)|, |v|) \quad (2.1)$$

を示さなくてはならない。 $|c(x-a)| \neq |v|$  ならこれは (常に) 成立している。  
 $|c(x-a)| = |v|$  なら  $c \neq 0$  としてよく、

$$|c(x-a)+v| = |c| |x-a + \frac{v}{c}|$$

となるが、右辺は  $x$  の定義から  $|c| |x-a|$  ( $= |v|$ ) より大きい。従って、(2.1) は成立する。

$n > 1$  の時。同様にして  $Ka_n \perp V$  となる  $a_n \in H$  が存在する。 $K$  が spherically complete だから  $Ka_n$  も spherically complete である。ゆえに Lemma 2.5 より  $Ka_n \oplus V$  は strictly closed で余次元は 1 減っている。帰納法の仮定から  $Ka_n \oplus V$  は norm direct supplement  $W_{n-1}$  を持つ。 $W_{n-1} \oplus Ka_n$  が  $V$  の norm direct supplement である。□

Definition 2.7.  $V$  を有限次元の normed  $K$ -vector space とし  $n = \dim_K V$  とおく。

$V$  の基底  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  は任意の  $c_1, \dots, c_n \in K$  に対して

$$\left| \sum_{i=1}^n c_i e_i \right| = \max_{1 \leq i \leq n} |c_i e_i|$$

が成立するとき直交基底であるという。さらに、すべての  $i$  で  $|e_i| = 1$  となるとき正規直交基底であるという。

これらは存在するとは限らないが、 $K$  が spherically complete なら有限次元 normed  $K$ -vector space  $V$  には直交基底が存在し、さらに  $|V| \subset |K|$  ならば正規直交基底が存在する ([1, Proposition 2.4.4/2, Observation 2.5.1/2])。なお、 $K$  が spherically complete でなければ 2 次元  $K$ -vector space で正規直交基底が存在しないものがある ([1, p.193])。

Definition 2.8. normed  $K$ -vector space  $H$  はその任意の有限次元部分空間が直交基底、あるいは正規直交基底を持つとき、それぞれ、 $K$ -cartesian space あるいは strictly  $K$ -cartesian space であるという。

Definition 2.9.  $H$  の可算部分集合  $\{e_i\}_{i=1}^\infty$  は以下の条件を満たすときに直交 Schauder 基底であるという。

- (1) 任意の  $v \in H$  に対し  $v = \sum_{i=1}^\infty c_i e_i$  となる収束級数が存在し、 $c_i$  は一意的に定まる。
- (2) 任意の収束級数  $\sum_{i=1}^\infty c_i e_i$  に対して

$$\left| \sum_{i=1}^\infty c_i e_i \right| = \max_{1 \leq i < \infty} |c_i e_i|$$

さらにすべての  $i$  で  $|e_i| = 1$  となるとき正規直交 Schauder 基底であるという。

$H$  が直交 Schauder 基底を持てば  $K$ -cartesian であり ([1, Proposition 2.7.2/7])、正規直交 Schauder 基底を持てば strictly  $K$ -cartesian である ([1, Proposition 2.7.5/1])。



Definition 2.10.  $P \in \text{Hom}_K(H, H)$  は  $P^2 = P$  かつ  $\text{Im } P \perp \text{Ker } P$  であるとき  $H$  の直交射影であるという。 $H$  の直交射影  $P$  で  $\dim_K P(H)$  が有限であるもの全体の集合を  $\text{FOP}(H)$  で表す。

$P$  が直交射影なら

$$|x| = \max(|P(x)|, |x - P(x)|) \geq |P(x)|$$

だから  $P$  は連続。また、任意の  $y \in \text{Ker } P$  に対して

$$|x - y| = |P(x) - y + (x - P(x))| \geq |P(x)|$$

で  $y = x - P(x)$  の時に等号が成立するので  $\text{Ker } P$  は  $H$  の強閉部分空間である。

Lemma 2.11.  $P, Q$  を  $H$  の直交射影で  $\text{Ker } P \subset \text{Ker } Q$  が成り立っているものとする。このとき  $PQ(H) \perp \text{Ker } Q$ 。

*Proof.*  $x \in PQ(H)$ 、 $y \in \text{Ker } Q$  とする。

$$|x + y| \geq |Q(x + y)| = |Q(x)|$$

ここで  $x = P(z)$  となる  $z \in Q(H)$  がある。 $\text{Ker } P \subset \text{Ker } Q$  より  $QP = Q$  だから

$$|x + y| \geq |QP(z)| = |z| \geq |P(z)| = |x| \quad (2.2)$$

が常に成り立つ。もし、 $|x + y| < \max(|x|, |y|)$  なら  $|x| = |y|$  でなければならないが、これは (2.2) に反する。□

Lemma 2.12.  $K$  は spherically complete であるとする。 $H$  は正規直交 Schauder 基底を持ち、 $|H - \{0\}|$  が離散的であるとする。 $n \geq 1$  に対し  $F_n \in \text{FOP}(H)$  が任意に与えられたとき次の 4 条件を満たす  $P_n \in \text{FOP}(H)$  が  $n \geq 1$  に対して存在する。

(2.3) 任意の  $n \geq 1$  に対し  $\text{Ker } P_n \subset \text{Ker } F_n$ 。

(2.4) 任意の  $n \geq 2$  に対し  $\text{Ker } P_n \subset \text{Ker } P_{n-1}$ 。

(2.5) 任意の  $n \geq 1$  に対し  $P_n(H) \supset P_{n-1}(H)$ 。

(2.6)  $P_n$  は  $n \rightarrow \infty$  で  $1_H$  に強収束する。

*Proof.*  $\{e_i\}_{i=1}^\infty$  を  $H$  の正規直交 Schauder 基底とする。 $E_n \in \text{FOP}(H)$  を

$$E_n\left(\sum_{i=1}^\infty c_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i e_i$$

で決める。 $P_0$  を零写像とし  $n \geq 1$  に対して  $P_n$  を  $P_{n-1}$  から以下のように帰納的に定める。

$$V_n = P_{n-1}(H) + Ke_n \quad (2.7)$$

とおくと  $\dim V_n < \infty$ 。 $K$  が spherically complete だから  $V_n$  も spherically complete。 $H$  が正規直交 Schauder 基底を持つから [1, Proposition 2.7.2/7] より  $V_n$  は norm direct supplement  $V_n^\perp$  を (少なくともひとつ) 持つ。 $R_n$  を  $H = V_n \oplus V_n^\perp$  に対する  $V_n$  成分への射影とすると  $R_n \in \text{FOP}(H)$ 。

$$A_n = \text{Ker } E_{n+1} \cap \text{Ker } P_{n-1} \cap \text{Ker } F_n \cap \text{Ker } R_n \quad (2.8)$$

とおくと、右辺に現れている各空間の余次元が有限の閉部分空間だから  $A_n$  も余次元な有限な閉部分空間。 $|H - \{0\}|$  が離散的だから  $A_n$  は強閉部分空間。 $A_n \subset \text{Ker } R_n$  から  $V_n \perp A_n$ 。ゆえに Lemma 2.5 より  $V_n \oplus A_n$  は余次元が有限の強閉部分空間となり Lemma 2.6 から norm direct supplement  $W_n$  を持つ。 $P_n$  を  $H = W_n \oplus V_n \oplus A_n$  の  $W_n \oplus V_n$  成分への射影とすると  $P_n \in \text{FOP}(H)$ 。これが要求された性質を持つことを示す。 $\text{Ker } P_n = A_n$  だから (2.8) より (2.3) と (2.4) は確かに成立する。また、 $P_n(H) \supset V_n \supset P_{n-1}(H)$  より (2.5) も成立。これと (2.7) より  $V_n \supset \bigoplus_{i=1}^n Ke_i$  となる。すなわち、 $P_n H \supset E_n H$ 。従って  $P_n E_n = E_n$  であるから任意の  $x \in H$  に対し

$$|(1_H - P_n)(x)| = |(1_H - P_n)(1_H - E_n)(x)|$$

$$\leq |(1_H - E_n)(x)| \quad (2.9)$$

$\{e_i\}_{i=1}^\infty$  は  $H$  の正規直交 Schauder 基底だから (2.9) は  $n \rightarrow \infty$  で 0 に収束する。□

以下では  $K$  が局所コンパクトであるとする。 $V$  が正規直交基底を持つ有限次元 normed  $K$ -vector space なら  $V$  も局所コンパクトになる。 $\mu_K, \mu_V$  をそれぞれ  $K$  および  $V$  の Haar 測度で

$$\mu_K(\{x \in K : |x| \leq 1\}) = 1 \quad (2.10)$$

$$\mu_V(\{x \in V : |x| \leq 1\}) = 1 \quad (2.11)$$

と正規化されているものとする。

Lemma 2.13.  $\{e_i\}_{i=1}^n$  を  $V$  の勝手な正規直交基底とする。 $\mu_K^n$  を  $K^n$  上の  $\mu_K$  の  $n$  重直積測度とする。 $\varphi: K^n \rightarrow V$  を  $\varphi(c_1, \dots, c_n) = \sum_{i=1}^n c_i e_i$  と定める。この時、 $\mu_V$  は  $\mu_K$  の  $\varphi$  による像測度となる。

*Proof.*  $\varphi$  は全単射等長写像であるから  $V$  と  $K^n$  は距離空間として同型である。 $V$  の部分集合  $E$  が Borel 可測であることと  $\varphi^{-1}(E)$  が Borel 可測であることは同値である。従って像測度

$$(\mu_K^n \varphi^{-1})(E) = \mu_K^n(\varphi^{-1}(E))$$

は完備 Borel 測度になる。しかも、 $\varphi$  が線型写像だから Haar 測度になる。Haar 測度の一意性から  $\mu_K^n \varphi^{-1}$  は  $\mu_V$  の定数倍になる。ここで、

$$\begin{aligned} (\mu_K^n \varphi^{-1})(\{x \in V : |x| \leq 1\}) &= \mu_K^n(\{(c_1, \dots, c_n) \in K^n : |\sum_{i=1}^n c_i e_i| \leq 1\}) \\ &= \mu_K^n(\{(c_1, \dots, c_n) \in K^n : \max_{1 \leq i \leq n} |c_i| \leq 1\}) \\ &= \prod_{i=1}^n \mu_K(\{c_i \in K : |c_i| \leq 1\}) \end{aligned}$$

$$= 1$$

だから  $\mu_K^n \varphi^{-1} = \mu_V$  である。□

**Lemma 2.14.**  $H$  を正規直交 Schauder 基底を持つ normed  $K$ -vector space とする。  $P, Q \in \text{FOP}(H)$  が  $\text{Ker } P \subset \text{Ker } Q$  を満たしているとする。  $D$  を  $Q(H)$  の可測集合、  $f$  を実数上定義された実数値関数とすると、

$$\int_D f(|x|) d\mu_{Q(H)}(x) = \int_{P(D)} f(|x|) d\mu_{PQ(H)}(x) \quad (2.12)$$

(片方が存在すれば他方も存在してその値は等しい。)

*Proof.*  $\text{Ker } P \subset \text{Ker } Q$  だから  $QP = Q$ 。  $x \in Q(H)$  に対して

$$|x| \geq |P(x)| \geq |QP(x)| = |Q(x)| = |x|$$

だから  $\pi = P|_{Q(H)}$  は  $Q(H)$  から  $PQ(H)$  への全単射等長写像である。特に、  $\{e_i\}_{i=1}^n$  が  $Q(H)$  の正規直交基底なら  $\{P(e_i)\}_{i=1}^n$  は  $PQ(H)$  の正規直交基底である。 Lemma 2.13 より (2.12) の両辺はともに

$$\int_{\varphi^{-1}(D)} f(|\varphi(x)|) d\mu_K^n(x)$$

に等しい。□

### 3. 局所体上の Wiener 測度の構成

前節では正規直交 Schauder 基底を持つ空間では実 Hilbert 空間と同様に直交射影の概念が定義され望ましい性質を持つことが分かった。前節の結果を基にして non-Archimedean な付値を持つ局所体上の Wiener 測度を構成する。本稿の Proposition 3.5, Lemma 3.7, Lemma 3.8, Lemma 3.9, Theorem 3.13, Theorem 3.14 が Kuo[3, Chap. I] で扱われている実 Wiener 測度の構成の Proposition 4.1, Lemma 4.2,

Lemma 4.4, Lemma 4.5, Theorem 4.1, Theorem 4.2 に相当する。しかしながら、可測半ノルムの定義は我々の場合 (Definition 3.6) と実 Wiener 測度の場合 (1.1) ではだいぶ異なる。

以下、本節では  $K$  は局所体とする。従って  $K$  は spherically complete である。 $H$  は正規直交 Schauder 基底を持つ normed  $K$ -vector space で  $|H-\{0\}|$  は離散的であるとする。このとき [1, Proposition 2.7.5/1] によって  $H$  の任意の有限次元部分空間  $V$  は正規直交基底を持ち、従って、 $V$  の Haar 測度  $\mu_V$  が存在する。 $K$  および  $V$  の Haar 測度は (2.10) および (2.11) のように正規化しておく。

Definition 3.1.  $H$  の部分集合  $E$  で適当な  $P \in \text{FOP}(H)$  および  $P(H)$  の可測集合  $F$  により

$$E = P^{-1}(F) = \{x \in H \mid P(x) \in F\}$$

と表されるものを  $H$  の cylinder set という。その全体を  $\text{Cyl}(H)$  で表す。

Lemma 3.2.  $\text{Cyl}(H)$  は集合体になる。

*Proof.*  $E_1 = P_1^{-1}(F_1)$ ,  $E_2 = P_2^{-1}(F_2)$ , ここで  $P_1, P_2 \in \text{FOP}(H)$  で  $F_1$  と  $F_2$  はそれぞれ  $P_1(H)$ ,  $P_2(H)$  の可測集合、とする。 $\text{Ker } P_1$  と  $\text{Ker } P_2$  は余次元が有限の  $H$  の閉部分空間だから  $\text{Ker } P_1 \cap \text{Ker } P_2$  も余次元が有限の閉部分空間である。ここで  $|H-\{0\}|$  が離散的だから強閉部分空間となる。ゆえに Lemma 2.6 より  $\text{Ker } P = \text{Ker } P_1 \cap \text{Ker } P_2$  となる  $P \in \text{FOP}(H)$  が存在する。 $i=1, 2$  に対して、

$$\begin{aligned} P^{-1}(E_i \cap P(H)) &= \{x \in H \mid P(x) \in E_i \cap P(H)\} \\ &= \{x \in H \mid P(x) \in E_i\} \\ &= \{x \in H \mid P_i P(x) \in F_i\} \end{aligned}$$

$P$  は射影子で  $\text{Ker } P_i \supset \text{Ker } P$  だから

$$P^{-1}(E_i \cap P(H)) = \{x \in H \mid P_i(x) \in F_i\} = E_i \quad (3.1)$$

$F_i$  は  $P_i(H)$  の可測集合で  $P_i$  (の  $P(H)$  への制限) は連続だから  $E_i \cap P(H) = \{x \in P(H) \mid P_i(x) \in F_i\}$  は  $P(H)$  の可測集合。従って、

$$E_1 \cup E_2 = P^{-1}((E_1 \cap P(H)) \cup (E_2 \cap P(H))) \quad (3.2)$$

$$E_1 \cap E_2 = P^{-1}(E_1 \cap E_2 \cap P(H))$$

また、

$$E_1^c = P_1(F_1^c)$$

以上より  $\text{Cyl}(H)$  は集合体である。□

さて、整数  $n \geq 1$  と実数  $r \in |K^{\times}|$  に対し  $\chi_{m,r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を

$$\chi_{m,r}(x) = \begin{cases} 0 & (x > r) \\ \left( \int_{|t| \leq r} d\mu_K(t) \right)^{-m} & (x \leq r) \end{cases}$$

とおく。このとき

$$\chi_{m+n,r}(\max(x, y)) = \chi_{m,r}(x) \chi_{n,r}(y) \quad (3.3)$$

$$\int_{K^n} \chi_{n,r}(|x|) d\mu_K^n(x) = 1 \quad (3.4)$$

となる。

Definition 3.3.  $H$  の分散  $r$  の Gauss 測度  $G_r$  は  $\text{Cyl}(H)$  上の次式で与えられる関数である。

$$G_r(P^{-1}(F)) = \int_F \chi_{\dim P(H), r}(|v|) d\mu_v(v)$$

Lemma 3.4.  $G_r$  は well defined である。

*Proof.*  $E = \{x \in H \mid P(x) \in F\}$ , ここで  $P \in \text{FOP}(H)$ ,  $F$  は  $P(H)$  の可測集合、に対して

$$U = \{x \in H : a + tx \in E \text{ for all } a \in E, t \in K\}$$

とおく。(  $U$  は  $P$  や  $F$  に依らず、 $E$  のみで決まることに注意されたい。 )  $U$  は  $H$  の部分空間で  $U \supset \text{Ker } P$  となる。 $Q$  を  $\text{Ker } Q = U$  となる任意の  $\text{FOP}(H)$  の元とする。これが少なくともひとつは存在することは次のようにして分かる。 $P(H)$  は  $K$ -cartesian だから [1, Proposition 2.4.1/5] により  $U \cap P(H)$  は  $P(H) = V \oplus (U \cap P(H))$  となる norm direct supplement  $V$  を持つ。 $Q \in \text{FOP}(H)$  を  $H = V \oplus (U \cap P(H)) \oplus \text{Ker } P$  に関する  $V$  成分への直交射影とする。 $\text{Ker } P \subset U$  より  $(U \cap P(H)) \oplus \text{Ker } P \subset U$ 。他方、 $x \in U$  なら  $P(x) = x - (x - P(x))$  で  $x - P(x) \in \text{Ker } P \subset U$  より  $P(x) \in U$ 。ゆえに  $x = P(x) + (x - P(x)) \in (U \cap P(H)) \oplus \text{Ker } P$ 。以上から

$$U = (U \cap P(H)) \oplus \text{Ker } P = \text{Ker } Q$$

$\text{Ker } P \subset \text{Ker } Q$  なので  $Q = QP$  であることに注意する。 $Q$  の選び方によらず、

$$F = \{v + u : v \in PQ(F), u \in \text{Ker } Q \cap P(H)\} \quad (3.5)$$

である。実際、 $x \in F \subset P(H)$  なら  $x = PQ(x) + (x - PQ(x))$ 。 $QP = Q = Q^2$  より  $x - PQ(x) \in \text{Ker } Q$  となり、 $F$  は (3.5) 右辺に含まれる。逆にある  $t \in F$  により  $v = PQ(t)$

なら  $u+PQ(t)-t \in \text{Ker } Q=U$ 、 $t \in F \subset E$  より  $u+v \in E$ 、すなわち  $P(u+v) \in F$ 。  
 $u+v \in P(H)$  だから  $u+v \in F$ 、よって (3.5) 右辺は  $F$  に含まれる。Lemma 2.11 より  
 $x \in F$  に対し  $x=u+v$  となる  $u \in \text{Ker } Q \cap P(H)$  と  $v \in PQ(F)$  は一意的である。簡単のため  
 $S = \text{Ker } Q \cap P(H)$  とおく。以上のことから

$$\begin{aligned} G_r(P^{-1}(F)) &= \int_F \chi_{\dim P(H),r}(|x|) d\mu_{P(H)}(x) \\ &= \int_{v \in PQ(F)} \int_{u \in S} \chi_{\dim P(H),r}(|u+v|) d\mu_S(u) d\mu_{PQ(H)}(v) \end{aligned}$$

Lemma 2.11 と (3.3) より

$$\begin{aligned} G_r(E) &= \int_{v \in PQ(H)} \chi_{\dim PQ(H),r}(|v|) d\mu_{PQ(H)}(v) \int_{u \in S} \chi_{\dim S,r}(|u|) d\mu_S(u) \\ &= \int_{v \in PQ(F)} \chi_{\dim PQ(H),r}(|v|) d\mu_{PQ(H)}(v) \end{aligned}$$

(ここで (3.4) を使った。) さらに Lemma 2.14 と  $Q(E) = QP(E) = Q(F)$  である  
 ことから結局

$$\begin{aligned} G_r(E) &= \int_{v \in Q(F)} \chi_{\dim Q(H),r}(|v|) d\mu_{Q(H)}(v) \\ &= \int_{v \in Q(E)} \chi_{\dim Q(H),r}(|v|) d\mu_{Q(H)}(v) \end{aligned}$$

右辺は  $P$ 、 $F$  の取り方に依存しない。□

$G_r$  は (3.1) と (3.2) より有限加法的である。しかしながら次の命題が成立する。

**Proposition 3.5.**  $G_r$  は可算加法的ではない。

*Proof.*  $\{e_i\}_{i=1}^\infty$  を  $H$  の正規直交 Schauder 基底とする。 $t \in K^\times$  を  $|t| < r$  となるよう  
 に選び、 $\rho$  を  $0 < \rho < |t|$  となる実数とする。数列  $\{b_n : b_n \geq 1\}_{n=1}^\infty$  を



$$(x_{1,r}(0)\mu_K(\{x \in K: \rho < |x| \leq r\}))^{b_n} \leq 2^{-(n+1)}$$

となるようにきめ、 $a_1 = 1$ 、 $a_{n+1} = a_n + b_n$  ( $n \geq 1$ ) とおく。

$$E_n = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \in H : |c_i - t| > \rho \text{ for } a_n \leq i < a_{n+1} \right\}$$

とおくと  $G_r(E_n) \leq 2^{-(n+1)}$ 。ここで任意の  $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \in H$  に対して  $\lim_{i \rightarrow \infty} |c_i| = 0$  だから  $|c_i| < \rho$  となる  $i$  がある。この時、 $a_n \leq i < a_{n+1}$  となる  $n$  で  $x \in E_n$ 。従って  $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 。  $G_r$  がもし可算加法的なら

$$\begin{aligned} 1 &= G_r(H) = G_r\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} G_r(E_n) \leq 1/2 \end{aligned}$$

となり矛盾である。□

**Definition 3.6.**  $H$  上の (半) ノルム  $\|\cdot\|$  は任意の  $\varepsilon > 0$  に対してある  $P \in \text{FOP}(H)$  が存在して  $\|x\| < \varepsilon \|x\|$  がすべての  $x \in \text{Ker } P$  で成り立つとき可測 (半) ノルムという。

可測ノルムは存在する。例えば、 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  正の実数の単調減少列で  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  となるものとする。 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  を  $H$  の正規直交 Schauder 基底とすると

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i \right\| = \max_{1 \leq i < \infty} \alpha_i |c_i|$$

は  $H$  の可測ノルムとなる。

**Lemma 3.7.**  $\|\cdot\|$  が  $H$  の可測半ノルムなら任意の  $x \in H$  に対して  $\|x\| \leq c \|x\|$  となる定数  $c$  が存在する。

*Proof.*  $\|\cdot\|$  が可測だから  $x \in \text{Ker } P$  なら  $\|x\| < \|x\|$  となる  $P \in \text{FOP}(H)$  が存在する。 $\dim P(H)$  は有限なので  $P(H)$  の正規直交基底  $\{v_i\}_{i=1}^n$  が存在する。 $y = \sum_{i=1}^n c_i v_i \in P(H)$  に

対して  $|y| \geq |c_i| \|v_i\|$  だから

$$\|y\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |c_i| \|v_i\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\|v_i\|}{|v_i|} |y|$$

よって

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq \max(\|P(x)\|, \|x-P(x)\|) \\ &\leq \max\left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{\|v_i\|}{|v_i|} |P(x)|, |x-P(x)|\right) \\ &\leq \max\left(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{\|v_i\|}{|v_i|}, 1\right) |x| \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.8.**  $\|\cdot\|$  を  $H$  の可測半ノルムとする。この時  $\{a_n \in \mathbb{R} : a_n > 0\}_{n=1}^{\infty}$  に対し以下の 4 条件を満たす列  $\{Q_n \in \text{FOP}(H)\}_{n=1}^{\infty}$  が存在する。

$$(3.6) \quad \text{任意の正整数 } m, n \text{ に対し } Q_m Q_n = \delta_{mn} Q_n$$

$$(3.7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} Q_n = 1_H \quad (\text{強収束})$$

$$(3.8) \quad \text{任意の } x \in H \text{ と } n \geq 2 \text{ に対して } a_n \|Q_n(x)\| \leq n^{-1} |x|.$$

$$(3.9) \quad \|x\|_0 = \max_{1 \leq n < \infty} a_n \|Q_n x\| \text{ は } H \text{ の可測半ノルムとなる。}\|\cdot\| \text{ がノルムなら } \|\cdot\|_0 \text{ もノルムとなる。}$$

*Proof.* 可測半ノルムの定義から各  $n \geq 1$  に対し、

$$\|x\| < \frac{1}{na_n} |x| \quad \text{for all } x \in \text{Ker } F_n \quad (3.10)$$

となる  $F_n \in \text{FOP}(H)$  が存在する。Lemma 2.12 より (2.3)-(2.6) を満たす  $P_n \in \text{FOP}(H)$  が存在する。(2.4) と (2.5) より

$$P_n P_m = P_{\min(m,n)} \quad (3.11)$$

となる。よって  $Q_1 = P_2 \in \text{FOP}(H)$ 、 $n \geq 2$  に対し、 $Q_n = P_{n+1} - P_n$  とおくと  $Q_n$  は (3.6) を満たす。また、 $n \geq 2$  なら

$$Q_n(H) = \text{Ker } P_n \cap P_{n+1}(H) \quad (3.12)$$

$$\text{Ker } Q_n(H) = P_n(H) \oplus \text{Ker } P_{n+1}$$

となることも (3.11) から従う。(2.4) から  $P_n H$ ,  $\text{Ker } P_{n+1}$ ,  $\text{Ker } P_n \cap P_{n+1}(H)$  は互いに直交することが分かるので特に  $Q_n(H) \perp \text{Ker } Q_n$ 。ゆえに  $n \geq 2$  の時も  $Q_n \in \text{FOP}(H)$  となる。また、 $\sum_{n=1}^N Q_n = P_{N+1}$  となりこれは (2.6) より  $1_H$  に強収束。すなわち (3.7) も成立する。

$n \geq 2$  ならば (3.12), (2.3) と (3.10) から (3.8) が従う。特に  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \|Q_n(x)\| = 0$  だから  $\|x\|_0$  は存在する。 $\|\cdot\|_0$  の可測性を示す。 $\varepsilon > 0$  を任意とする。 $1/\varepsilon$  よりも大きい整数  $N \geq 2$  をとる。(3.11) より

$$\begin{aligned} \|(1_H - P_N)(x)\|_0 &= \max(a_1 \|P_2(1_H - P_N)(x)\|, \max_{2 \leq n < \infty} a_n \|(P_{n+1} - P_n)(1_H - P_N)(x)\|) \\ &= \max_{N \leq n < \infty} a_n \|Q_n(x)\| \end{aligned}$$

(3.8) から

$$\|(1_H - P_N)(x)\|_0 \leq \max_{N \leq n < \infty} |x|/n < \varepsilon |x|$$

となって、 $\|\cdot\|_0$  は可測である。

最後に、 $\|\cdot\|$  がノルムであるとする。 $\|x\|_0 = 0$  なら任意の  $n$  に対して  $\|Q_n(x)\| = 0$ 、すなわち、 $Q_n(x) = 0$ 。(3.7) より  $x = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) = 0$ 。よって  $\|\cdot\|_0$  はノルムである。これで (3.9) も証明された。□

**Lemma 3.9.**  $\|\cdot\|$  を  $H$  の可測ノルムとし、 $B$  を  $H$  の  $\|\cdot\|$  による完備化とする。このとき  $H$  の可測ノルム  $\|\cdot\|_0$  で任意の  $r > 0$  に対し

$$S_r = \{x \in H : \|x\|_0 \leq r\}$$

が  $B$  で全有界となるものがある。

*Proof.* Lemma 3.7 より任意の  $x \in H$  に対して  $a_1 \|x\| \leq |x|$  となる正の実数  $a_1$  がある。

$\{a_n \in \mathbf{R} : a_n > 0\}_{n=2}^\infty$  を  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  を満たす正の実数列とする。Lemma 3.8 で定まる  $\|\cdot\|_0$  が要求された性質を持つことを示す。

$S_r$  が全有界であることを示すには  $S_r$  の任意の列  $\{x_n\}_{n=1}^\infty$  が Cauchy 部分列を持つことを示せばよい。 $x_n^{(0)} = x_n$  とおき、 $k \geq 1$  に対して  $x_n^{(k-1)}$  の部分列  $x_n^{(k)}$  を以下のように作る。任意の  $y \in S_r$  に対し

$$a_k \|Q_k(y)\| \leq \|y\|_0 \leq r \quad (3.13)$$

$Q_k(H)$  は正規直交基底を持つ有限次元空間だから  $\{Q_k(x_n^{(k)})\}_{n=1}^\infty$  が  $\|\cdot\|$ -Cauchy 列になるような  $\{x_n^{(k-1)}\}_{n=1}^\infty$  の部分列  $x_n^{(k)}$  がある。対角列  $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty$  は任意の  $k \geq 1$  に対し  $\{Q_k(x_n^{(n)})\}_{n=1}^\infty$  が  $\|\cdot\|$ -Cauchy 列となる。

$\varepsilon > 0$  を任意とする。 $k \geq M$  なら  $a_k \geq \frac{r}{\varepsilon}$  となる整数  $M$  がある。Lemma 3.7 と (3.7) より

$$\begin{aligned} \|x_n^{(n)} - x_m^{(m)}\| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^j Q_k(x_n^{(n)} - x_m^{(m)}) \right\| \\ &\leq \sup_{1 \leq k < \infty} \|Q_k(x_n^{(n)} - x_m^{(m)})\| \end{aligned} \quad (3.14)$$

$k \geq M$  なら (3.13) より  $\|Q_k(x_n^{(n)} - x_m^{(m)})\| \leq \frac{r}{a_k} \leq \varepsilon$ 。  $1 \leq k < M$  に対しては  $\{Q_k(x_n^{(n)})\}_{n=1}^\infty$  が  $\|\cdot\|$ -Cauchy 列だから  $1 \leq k \leq M$  かつ  $m, n > N$  ならば

$$\|Q_k(x_n^{(n)}) - Q_k(x_m^{(m)})\| < \varepsilon$$

となる整数  $N$  がある。ゆえに  $m, n \geq N$  ならば (3.14) は  $\varepsilon$  以下。すなわち、 $\{x_n^{(n)}\}_{n=1}^\infty$

は  $\|\cdot\|$ -Cauchy 列である。□

Definition 3.10.  $\|\cdot\|$  を  $H$  の可測ノルムとする。  $B$  を  $H$  の  $\|\cdot\|$  による完備化、  $B^*$  を  $B$  から  $K$  への連続線型写像とする。適当な整数  $n \geq 1$ 、  $K^n$  の可測集合  $E$ 、  $P_1, \dots, P_n \in B^*$  により

$$\{x \in B : (P_1(x), \dots, P_n(x)) \in E\}$$

と表される集合を  $B$  の cylinder set という。その全体のなす集合を  $\text{Cyl}^*(B)$  と書く。

Lemma 3.11.  $T \in \text{Cyl}^*(B)$  なら  $T \cap H \in \text{Cyl}(H)$ 。

*Proof.*  $T \in \text{Cyl}^*(B)$  とする。

$$T = \{x \in B : (P_1(x), \dots, P_n(x)) \in E\}$$

となる整数  $n \geq 1$ 、  $K^n$  の可測集合  $E$ 、  $P_1, \dots, P_n \in B^*$  がある。Lemma 3.7 より  $P_i$  の  $H$  への制限は連続だから

$$V = \bigcap_{i=1}^n \{x \in H : P_i(x) = 0\}$$

は  $H$  の閉部分空間である。 $|H - \{0\}|$  が離散的だから  $V$  は強閉部分空間。また、 $\text{codim } V \leq n$ 。よって、 $V$  は norm direct supplement  $W$  を持つ。 $P \in \text{FOP}(H)$  を  $H = W \oplus V$  の  $W$  成分への射影とする。

$$E' = \{x \in W : (P_1(x), \dots, P_n(x)) \in E\}$$

とおくと  $E'$  は  $W$  の可測集合で、 $P_i = P_i P$  より

$$T \cap H = \{x \in H : P(x) \in E'\} \in \text{Cyl}(H)$$

□

Definition 3.12.  $r \in |K^*|$  とする。  $T \in \text{Cyl}^*(B)$  に対して

$$W_r(T) = G_r(T \cap H)$$

を分散  $r$  の Wiener 測度という。

$\text{Cyl}^*(B)$  は集合体であり、 $W_r$  がその上の有限加法的測度であることは容易に分かる。

$\text{Cyl}^*(B)$  で生成された  $\sigma$ -field を  $\sigma[\text{Cyl}^*(B)]$  と書く。次の定理が本稿の主結果である。

Theorem 3.13.  $W_r$  は  $\sigma[\text{Cyl}^*(B)]$  上の可算加法的測度に拡張される。

*Proof.*  $T_n \in \text{Cyl}^*(B)$  が  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$  を満たすなら  $\sum_{n=1}^{\infty} W_r(T_n) \geq 1$  であることを示せばよい。

$\varepsilon > 0$  を任意とする。正整数  $m$  に対し、 $K^m$  の Haar 測度は正則だから  $U_n \in \text{Cyl}^*(B)$  で開集合であり、 $U_n \supset T_n$ 、 $W_r(U_n) \leq W_r(T_n) + \varepsilon 2^{-n}$  を満たすものがある。

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\|\cdot\|_0$  を Lemma 3.9 の様に決める。そこで  $\{x \in H : \|x\|_0 \leq r\}$  の  $B$  での閉包を  $C$  とおく。Lemma 3.9 から  $C$  はコンパクトである。 $T \in \text{Cyl}^*(B)$  が  $T \cap C = \emptyset$  であるとする。当然、 $(T \cap H) \cap C = \emptyset$ 。他方 Lemma 3.11 より  $T \cap H = P^{-1}(E)$  となる  $P \in \text{FOP}(H)$ ,  $P(H)$  の可測集合  $E$  があるが  $x \in E$  なら  $x \in T \cap H \subset C^c$ 。ゆえに  $\|x\|_0 > r$  である。 $\|\cdot\|_0$  の定義 (3.9) より  $a_n \|Q_n(x)\| > r$  となる  $n$  がある。(3.8) あるいは  $a_1$  の決め方から  $\|x\| > r$ 、従って、 $W_r(T) = 0$ 。

$C$  はコンパクトゆえある整数  $N$  があり、 $C \subset \bigcup_{n=1}^N U_n$  となるが、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} W_r(U_n) &\geq \sum_{n=1}^N W_r(U_n) \\ &\geq W_r\left(\bigcup_{n=1}^N U_n\right) \\ &\geq 1 - W_r\left(B - \bigcup_{n=1}^N U_n\right) \end{aligned}$$

ここで  $(B - \bigcup_{n=1}^N U_n) \cap C = \emptyset$  だから

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_r(U_n) \geq 1$$

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} W_r(T_n) \geq 1 - \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$  は任意だったからこれで  $W_r$  の可算加法性が証明された。□

Theorem 3.14.  $\sigma[\text{Cyl}^*(B)]$  は  $B$  の Borel 集合体である。

*Proof.* [1, Proposition 2.7.2/8] より  $\|\cdot\|$  と同値な  $B$  のノルム  $\|\cdot\|'$  で  $B$  が ( $\|\cdot\|'$  に関する) 正規直交 Schauder 基底  $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  を持つものをとる。 $(B, \|\cdot\|')$  は可分な Banach 空間だから

$$S = \{x \in B : \|x\|' \leq 1\} \in \sigma[\text{Cyl}^*(B)]$$

を示せばよい。 $P_n \in B^*$  を

$$P_n(\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i) = c_n$$

で決める。 $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$  が正規直交 Schauder 基底だから

$$\|x\|' = \max_{1 \leq n < \infty} |P_n(x)|$$

よって

$$S = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in B : |P_n(x)| \leq 1\}$$

だから  $S \in \sigma[\text{Cyl}^*(B)]$  である。□

## 4. 計算例

以下の計算例にはかなり無理があると思われるが、本稿で構成した測度がどのような感じになっているかを見るためあえて掲げる。 $p$  を素数、 $T$  を不定元とする。 $|\cdot|$  を  $|p| = p^{-1}$  と正規化した  $p$  進付値とする。 $\|\cdot\|$  を  $\mathbb{Z}_p[[T]]$  の極大イデアル  $\mathfrak{m} = (p, T)$  が  $\mathbb{Q}_p((T))$  に導く  $\mathfrak{m}$  進付値を  $\|p\| = \|T\| = p^{-1}$  と正規化したものとする。 $N$  を整数とし

$$H_N = \left\{ \sum_{n=-N}^{\infty} a_n T^n : a_n \in \mathbb{Q}_p, \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0 \right\}$$

$$B_N = \left\{ \sum_{n=-N}^{\infty} a_n T^n : a_n \in \mathbb{Q}_p, \lim_{n \rightarrow \infty} |p^n a_n| = 0 \right\}$$

とおく。 $H_N$  は  $|\cdot|$  に関して完備であり、正規直交 Schauder 基底として例えば  $\{T^n\}_{n=-N}^{\infty}$  がとれる。また、 $\|\cdot\|$  は可測ノルムであり、 $H_N$  をこれで完備化すると  $B_N$  になる。 $\|B_N\| = |H_N| = \{p^a : a \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$  に注意する。以下、 $r=1$  とし、 $(H_N, B_N)$  により定義される non-Archimedean Wiener 測度を簡単のため  $W^{(N)}$  とおく。

整数  $M$  に対して

$$K_M = \{x \in B : \|x\| \leq p^{-M}\}$$

の測度  $W^{(N)}(K_M)$  を計算してみよう。 $\{(T/p)^n\}_{n=-N}^{\infty}$  は  $B_N$  の  $\|\cdot\|$  に関する正規直交 Schauder 基底であるから、

$$E_{m,M} = \left\{ \sum_{n=-N}^{\infty} a_n T^n \in B_N : |a_m| \leq p^{m-M} \right\}$$

とおくと  $K_M = \bigcap_{n=-N}^{\infty} E_{m,M}$  である。 $W^{(N)}$  は可算加法的だから

$$W^{(N)}(K_M) = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{(N)}\left(\bigcap_{m=-N}^n E_{m,M}\right)$$

がなり立つ。



$$\begin{aligned}
W^{(N)}\left(\bigcap_{m=-N}^n E_{m,M}\right) &= \prod_{m=-N}^n \int_{\{x \in \mathbf{Q}_p : \|x\| \leq p^{m-M}\}} \chi_{1,1}(x) d\mu_{\mathbf{Q}_p}(x) \\
&= \begin{cases} 1 & (M \leq -N) \\ p^{-(2M+N-n)(N+n+1)/2} & (-N < n \leq M) \\ p^{-(M+N)(M+N+1)/2} & (-N < M < n) \end{cases}
\end{aligned}$$

よって

$$W^{(N)}(K_M) = \begin{cases} 1 & (M \leq -N) \\ p^{-(M+N)(M+N+1)/2} & (M > N) \end{cases}$$

これより  $N \geq 0$  の時は  $s \in \mathbf{C}$ ,  $\operatorname{Re}(s) > 0$  に対して

$$\begin{aligned}
&\int_{\{x \in B_N : \|x\| \leq 1\}} \frac{\|x\|^s}{W^{(N)}(\{y \in B : \|y\| \leq \|x\|\})} dW^{(N)}(x) \\
&= \sum_{M=0}^{\infty} p^{-sM} \left( 1 - \frac{W^{(N)}(K_{M+1})}{W^{(N)}(K_M)} \right) \\
&= (1-p^{-s})^{-1} - p^{-N-1}(1-p^{-s-1})^{-1}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

となる。ここで形式的に  $N \rightarrow \infty$  とすれば (4.1) は  $(1-p^{-s})^{-1}$  となるが、 $W^{(N)}(B_{N-1}) = 0$  だから単純に極限を取ってもその解釈が難しい。さらに  $\|\cdot\|$  は  $H_{\infty} = \bigcup_{N=0}^{\infty} H_N$  の可測ノルム「ではない」。また、数論的観点からは  $\mathbf{Z}_p[[T]]$  から作った2次元局所体上で積分することが望ましいのであるが、現時点で、筆者はこの場合の結果を得ていない。Non-Archimedean Wiener 測度が有効なものであるかどうかを判断するためにはなお慎重な考察が必要であるように思える。

## References

1. Bosch, S., Güntzer, U. and Remmert, R.: Non-Archimedean Analysis. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 261. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer 1984
2. Gross, L.: Abstract Wiener spaces, Proc. fifth Berkeley sympos. math. Statist. and probability (Berkeley, Calif., 1965/1966), 2, 31-42, Berkeley: Univ. California Press, 1967.
3. Kuo, H. H.: Gaussian Measures in Banach Spaces. Lecture Notes in Math., 463. Berlin Heidelberg New York: Springer 1975
4. Wiener, N.: The average value of a functional. Proc. London Math. Soc. 22, 454-467 (1922)